Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Une estimation asymptotique pour le modèle de Ginzburg-Landau

Michael STRUWE

Résumé – Étant donné $\Omega\subset\subset\mathbf{R}^2$ suffisamment régulier, $g\in C^1(\partial\Omega; S^1)$, et

$$H_g^1=\{u\in H^{1,2}(\Omega; \mathbf{C});\ u=g \text{ sur } \partial\Omega\},$$

on démontre l'estimation

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|u_\varepsilon|^2)^2\,dx\right\}<\infty$$

pour toute fonction minimisante $u_\varepsilon\in H_g^1$ de l'énergie de Ginzburg-Landau

$$E_\varepsilon(u)=\int_\Omega\left\{\frac{|\nabla u|^2}{2}+\frac{1}{4\varepsilon^2}(1-|u_\varepsilon|^2)^2\right\}dx.$$

An asymptotic estimate for the Ginzburg-Landau model

Abstract – *For a smooth domain* $\Omega\subset\subset\mathbf{R}^2$, $g\in C^1(\partial\Omega; S^1)$, *with*

$$H_g^1=\{u\in H^{1,2}(\Omega; \mathbf{C});\ u=g \text{ on } \partial\Omega\},$$

we show that for any minimizers $u_\varepsilon\in H_g^1$ *of the Ginzburg-Landau energy*

$$E_\varepsilon(u)=\int_\Omega\left\{\frac{|\nabla u|^2}{2}+\frac{1}{4\varepsilon^2}(1-|u|^2)^2\right\}dx$$

there holds

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|u_\varepsilon|^2)^2\,dx\right\}<\infty.$$

Abridged English Version – Let Ω be a smooth, bounded domain in $\mathbf{R}^2$, $g:\partial\Omega\to S^1$ of class C^1, and define

$$H_g^1=\{u\in H^{1,2}(\Omega; \mathbf{C});\ u=g \text{ on } \partial\Omega\}.$$

For $\varepsilon>0$, $u\in H_g^1$ consider the Ginzburg-Landau energy

$$E_\varepsilon(u)=\int_\Omega\left\{\frac{|\nabla u|^2}{2}+\frac{1}{4\varepsilon^2}(1-|u|^2)^2\right\}dx.$$

It is known that $H_g^1\neq\varnothing$ and that for any $\varepsilon>0$ the functional E_ε achieves its infinum

$$\nu(\varepsilon)=\inf_{H_g^1} E_\varepsilon.$$

Moreover, there exist constants M_1, $M_2>0$ such that there holds

$$(1)\qquad \nu(\varepsilon)\leqq M_1|\ln\varepsilon|+M_2;$$

see [1], lemma 1. In fact, if Ω is simply connected, $M_1=\pi|d|$ is related to the degree d of the data g, viewed as a map $g:S^1\to S^1$, and $M_2=M_2(\Omega, g)$.

Note that for fixed $u\in H_g^1$ the map

$$\varepsilon\to E_\varepsilon(u)$$

is non-increasing and

$$(2)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}E_\varepsilon(u)\right|=\frac{1}{2\varepsilon^3}\int_\Omega (1-|u|^2)^2\,dx.$$

Note présentée par Haïm BREZIS.

0764-4442/93/03170677 \$ 2.00

In the spirit of [4], estimates (4.8) and (4.10), p. 60, we deduce from this the following result.

LEMMA 1. — (i) *The function* $\varepsilon \to \nu(\varepsilon)$ *is non-increasing and hence differentiable for almost every* $\varepsilon > 0$ *with differential* $(\partial/\partial\varepsilon)\nu(\varepsilon) = \nu'(\varepsilon) \leqq 0$.

(ii) *At a point* ε *of differentiability of* ν *there holds the estimate*

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|u_\varepsilon|^2)^2\,dx \leqq 2\varepsilon\,|\nu'(\varepsilon)|$$

for any minimizer $u_\varepsilon \in H^1_g$ *of* E_ε.

Proof. — (i) Monotonicity of $\nu(\varepsilon)$ follows from monotonicity of E_ε. Almost everywhere differentiability then is a consequence of a classical measure theoretical result.

(ii) Let $u = u_\varepsilon \in H^1_g$ achieve $E_\varepsilon(u) = \nu(\varepsilon)$. Note that for $\delta > 0$ we have

$$\nu(\varepsilon+\delta) \leqq E_{\varepsilon+\delta}(u) \leqq E_\varepsilon(u) = \nu(\varepsilon).$$

Hence from (2) we obtain

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\varepsilon^3}\int_\Omega (1-|u|^2)^2\,dx &= \lim_{\delta\to 0}\frac{E_\varepsilon(u)-E_{\varepsilon+\delta}(u)}{\delta}\\ &\leqq \limsup_{\delta\to 0}\frac{\nu(\varepsilon)-\nu(\varepsilon+\delta)}{\delta} = |\nu'(\varepsilon)|,\end{aligned}$$

as claimed. □

LEMMA 2:

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}|\varepsilon\nu'(\varepsilon)| \leqq M_1.$$

Proof. — Suppose by contradiction that for some $\varepsilon_0 > 0$ and all $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ we have

$$|\nu'(\varepsilon)| \geqq (1+\varepsilon_0)\frac{M_1}{\varepsilon}.$$

Integrating from ε to ε_0, we then obtain

$$\nu(\varepsilon) \geqq \int_\varepsilon^{\varepsilon_0}|\nu'(\varepsilon)|\,d\varepsilon + \nu(\varepsilon_0) \geqq (1+\varepsilon_0)M_1\ln\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) + \nu(\varepsilon_0)$$

and the latter is

$$> M_1|\ln(\varepsilon)| + M_2$$

for suitable $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, contradicting (1). □

The following result is immediate from lemmas 1 and 2.

THEOREM 1. — *For* E_ε, *etc. as above there holds*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\sup_{u_\varepsilon}\int_\Omega (1-|u_\varepsilon|^2)^2\,dx\right\} \leqq 2M_1,$$

where we take the supremum over all minimizers u_ε *of* E_ε.

For star-shaped domains this estimate is obtained in [2]. In fact, a much sharper assertion can be made; *cf.* [2], theorem 1.*c*).

Theorem 1 allows to extend some of the results of [1]-[3] on the asymptotic behavior of minimizers of the Ginzburg-Landau model to domains which are not necessarily star-shaped or simply connected.

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ un domaine borné et suffisamment régulier. Étant donnée une fonction $g : \partial\Omega \to S^1$ de classe C^1 on définit

$$H_g^1 = \{ u \in H^{1,2}(\Omega; \mathbf{C});\ u = g \text{ on } \partial\Omega \}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, $u \in H_g^1$, on considère l'énergie de Ginzburg-Landau

$$E_\varepsilon(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{1}{4\varepsilon^2}(1 - |u|^2)^2 \right\} dx.$$

On sait que pour tous ces g l'ensemble H_g^1 est non vide et, en plus, que pour toute $\varepsilon > 0$ l'infimum

$$\nu(\varepsilon) = \inf_{H_g^1} E_\varepsilon$$

est atteint. Finalement, il existe des constantes M_1, $M_2 > 0$ telles que

$$\nu(\varepsilon) \leqq M_1 |\ln \varepsilon| + M_2; \tag{1}$$

voir [1], lemme 1. En fait, si Ω est simplement connexe, la constante $M_1 = \pi |d|$ est liée au degré d de g, considéré comme application $g : S^1 \to S^1$, et $M_2 = M_2(\Omega, g)$.

On se rend compte que pour chaque $u \in H_g^1$ l'application

$$\varepsilon \to E_\varepsilon(u)$$

est décroissante et, en plus,

$$\left| \frac{\partial}{\partial\varepsilon} E_\varepsilon(u) \right| = \frac{1}{2\varepsilon^3} \int_\Omega (1 - |u|^2)^2\, dx. \tag{2}$$

Suivant les idées de [4], estimations (4.8) et (4.10), p. 60, on y déduit

LEMME 1. — (i) *La fonction* $\varepsilon \to \nu(\varepsilon)$ *est décroissante et donc possède une dérivée* $(\partial/\partial\varepsilon)\,\nu(\varepsilon) = \nu'(\varepsilon) \leqq 0$ *pour presque toutes les valeurs de* $\varepsilon > 0$.

(ii) *Si* ν *est différentiable au point* ε, *on a*

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Omega (1 - |u_\varepsilon|^2)^2\, dx \leqq 2\varepsilon |\nu'(\varepsilon)|$$

pour toute fonction $u_\varepsilon \in H_g^1$ *minimisante de* E_ε.

Démonstration. — (i) La monotonie de $\nu(\varepsilon)$ est une conséquence immédiate de la monotonie de E_ε. La différentiabilité presque partout est une conséquence d'un résultat classique de la théorie de la mesure.

(ii) Soit $u = u_\varepsilon \in H_g^1$ une fonction minimisante tel que $E_\varepsilon(u) = \nu(\varepsilon)$. Alors pour tout $\delta > 0$ on obtient

$$\nu(\varepsilon + \delta) \leqq E_{\varepsilon+\delta}(u) \leqq E_\varepsilon(u) = \nu(\varepsilon).$$

D'après (2) on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon^3} \int_\Omega (1 - |u|^2)^2\, dx &= \lim_{\delta \to 0} \frac{E_\varepsilon(u) - E_{\varepsilon+\delta}(u)}{\delta} \\ &\leqq \limsup_{\delta \to 0} \frac{\nu(\varepsilon) - \nu(\varepsilon+\delta)}{\delta} = |\nu'(\varepsilon)|, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

LEMME 2:

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon |\nu'(\varepsilon)| \leqq M_1.$$

Démonstration. — Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon_0>0$ tel que pour toute $\varepsilon\in]0, \varepsilon_0]$ on a

$$|\nu'(\varepsilon)|\geqq\frac{(1+\varepsilon_0)\mathrm{M}_1}{\varepsilon}.$$

Après intégration de cette inégalité de ε à ε_0, on obtient

$$\nu(\varepsilon)\geqq\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}|\nu'(\varepsilon)|\,d\varepsilon+\nu(\varepsilon_0)\geqq(1+\varepsilon_0)\mathrm{M}_1\ln\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)+\nu(\varepsilon_0)$$

et pour $0<\varepsilon$ suffisamment petit le dernier terme est

$$>\mathrm{M}_1|\ln(\varepsilon)|+\mathrm{M}_2,$$

ce qui contredit (1). □

Des lemmes 1 et 2 on obtient immédiatement

Théorème 1. — *Avec* E_ε, *etc. définis comme ci-dessus on a*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\sup_{u_\varepsilon}\int_{\Omega}(1-|u_\varepsilon|^2)^2\,dx\right\}\leqq 2\,\mathrm{M}_1,$$

où on prend le supremum parmi toutes les fonctions minimisantes u_ε *de* E_ε.

Pour des domaines étoilés le résultat du théorème 1 a été démontré dans [2]. En fait, on obtient des informations très détaillées; *voir* [2], théorème 1.*c*). Le théorème 1 permet de généraliser certains résultats de [1]-[3] concernant le comportement asymptotique des fonctions minimisantes de l'énergie de Ginzburg-Landau au cas des domaines non étoilés ou pas simplement connexe.

Note remise et acceptée le 29 juillet 1993.

Références bibliographiques

[1] F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein, Limite singulière pour la minimisation de fonctionnelles du type Ginzburg-Landau, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 314, série I, 1992, p. 891-895.

[2] F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein, Tourbillons de Ginzburg-Landau et énergie renormalisée, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 317, série I, 1993, p. 165-171.

[3] F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein, *Ginzburg-Landau vortices*, Birkhäuser (à paraître).

[4] M. Struwe, The existence of surfaces of prescribed constant mean curvature with free boundary, *Acta Math.*, 160, 1988, p. 19-64.

ETH Zürich, CH-8092 Zürich, Suisse,
E-mail: struw@math. ethz. ch.